

# Integrálszámítás (Gyakorló feladatok)

Programtervező matematikus szakos hallgatóknak  
az Analízis 3. című tárgyhoz

Összeállította

Bese Antal, Csillag Dávid, Kiss Balázs, Mátyás Gergely,  
Szili László

2004. október

# Tartalomjegyzék

<b>I. Feladatok</b>	<b>5</b>
<b>1. Primitív függvények (határozatlan integrálok)</b>	<b>7</b>
1.1. A definíciók egyszerű következményei	7
1.2. Primitív függvények meghatározására vonatkozó módszerek	8
1.2.1. Alapintegrálok	8
1.2.2. Alapintegrálokra vezető típusok	8
1.2.3. Integrálás „ügyesen”	11
1.2.4. Parciális integrálás	11
1.2.5. Integrálás helyettesítéssel	13
1.2.6. Racionális függvények integrálása	13
1.2.7. Racionális függvények integrálására vezető helyettesítések	14
<b>2. A határozott integrál</b>	<b>16</b>
2.1. A határozott integrál értelmezése	16
2.2. A határozott integrál tulajdonságai és kiszámítása	17
2.3. A határozott integrál alkalmazásai	20
2.4. Improprius integrálok	24
2.5. Kiegészítések a differenciálszámításhoz és az integrálszámításhoz	28
<b>II. Megoldások</b>	<b>29</b>
<b>1. Primitív függvények (határozatlan integrálok)</b>	<b>31</b>
1.1. A definíciók egyszerű következményei	31
1.2. Primitív függvények meghatározására vonatkozó módszerek	32
1.2.1. Alapintegrálok	32
1.2.2. Alapintegrálokra vezető típusok	33
1.2.3. Integrálás „ügyesen”	36
1.2.4. Parciális integrálás	38

---

1.2.5. Integrálás helyettesítéssel . . . . .	41
1.2.6. Racionális függvények integrálása . . . . .	42
1.2.7. Racionális függvények integrálására vezető helyettesítések . . . . .	46
<b>2. A határozott integrál . . . . .</b>	<b>48</b>
2.1. A határozott integrál értelmezése . . . . .	48
2.2. A határozott integrál tulajdonságai és kiszámítása . . . . .	51
2.3. A határozott integrál alkalmazásai . . . . .	57
2.4. Impropius integrálok . . . . .	57
2.5. Kiegészítések a differenciálszámításhoz és az integrálszámításhoz . . .	57



I. rész

Feladatok



# 1. Primitív függvények (határozatlan integrálok)

## 1.1. A definíciók egyszerű következményei

**F1.** Határozza meg az alábbi függvények *összes* primitív függvényét:

$$(a) f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in (0, +\infty)); \quad (b) f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in (-\infty, 0));$$

$$(c) f(x) := \frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \in (0, \pi)); \quad (d) f(x) := \frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**F2.** Határozza meg az  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény  $x_0 \in I$  pontban eltűnő primitív függvényét, ha

$$(a) f(x) := \cos x \quad (x \in \mathbb{R}, \quad x_0 := \frac{3\pi}{4});$$

$$(b) f(x) := \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \quad (x \in \mathbb{R}^+, \quad x_0 := 8).$$

**F3.** Keresse meg azt a  $f$  függvényt, amelyre

$$(a) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x \in \mathbb{R}^+), \quad f(4) = 1;$$

$$(b) f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad (x > -1), \quad f(0) = 2;$$

$$(c) f''(x) = x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f(0) = -3, \quad f'(0) = 2;$$

$$(d) f''(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R}^+), \quad f(1) = 0, \quad f'(2) = 0;$$

$$(e) f''(x) = 3e^x + 5 \sin x \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 2;$$

$$(f) f'''(x) = \sin x, \quad (x \in \mathbb{R}), \quad f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 1.$$

**F4.** Igazolja, hogy a sign függvénynek *nincs* primitív függvénye.

**F5.** (a) Bizonyítsa be, hogy ha az  $I \subset \mathbb{R}$  intervallumon értelmezett  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek az  $F_1, F_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$  primitív függvényei, akkor

$$\exists c \in \mathbb{R}, \quad \text{hogy} \quad F_1(x) - F_2(x) = c \quad (\forall x \in I).$$

(b) Mutassa meg, hogy az előző állításban az a feltétel, hogy  $\mathcal{D}_f$  intervallum legyen, lényeges: Adjon meg olyan nemüres  $H \subset \mathbb{R}$  nyílt halmazt, olyan  $F_1, F_2 : H \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvényeket, amelyre  $F_1'(x) = F_2'(x)$  teljesül minden  $x \in H$  esetén, ugyanakkor  $F_1$  és  $F_2$  nem konstansban különböznek egymástól.

## 1.2. Primitív függvények meghatározására vonatkozó módszerek

### 1.2.1. Alapintegrálok

**F6.** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálok az adott  $I$  intervallumokon:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int (6x^2 - 8x + 3) dx, \quad I := \mathbb{R}; & \text{(b)} \quad & \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx, \quad I := \mathbb{R}^+; \\ \text{(c)} \quad & \int \sqrt{x} \sqrt{x} \sqrt{x} dx, \quad I := \mathbb{R}^+; & \text{(d)} \quad & \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx, \quad I := \mathbb{R}^+; \\ \text{(e)} \quad & \int \left(2x + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx, \quad I := (-1, 1). \end{aligned}$$

### 1.2.2. Alapintegrálokra vezető típusok

•  $\int \frac{f'}{f}$  alakú integrálok

**F7.** Mutassa meg, hogy ha  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  pozitív és differenciálható az  $I$  intervallumon, akkor

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c} \quad (x \in I).$$

**F8.** Az előző feladat segítségével számítsa ki az alábbi határozatlan integrálok az adott  $I$  intervallumokon:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int \frac{x}{x^2 + 3} dx, \quad I := \mathbb{R}; & \text{(b)} \quad & \int \frac{x - 3}{x^2 - 6x + 27} dx, \quad I := \mathbb{R}; \\ \text{(c)} \quad & \int \operatorname{tg} x dx, \quad I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); & \text{(d)} \quad & \int \frac{e^{3x}}{e^{3x} + 5} dx, \quad I := \mathbb{R}; \\ \text{(e)} \quad & \int \frac{dx}{x \ln x}, \quad I := (0, 1); & \text{(f)} \quad & \int \frac{dx}{x \ln x}, \quad I := (1, +\infty); \end{aligned}$$

•  $\int f^\alpha \cdot f'$  alakú integrálok

**F9.** Tegyük fel, hogy az  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény pozitív és differenciálható az  $I$  intervallumon és  $\alpha \neq -1$  valós szám. Mutassa meg, hogy

$$\boxed{\int f^\alpha(x) f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c} \quad (x \in I).$$

**F10.** Az előző feladat eredményének felhasználásával számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott  $I$  intervallumokon:

(a)  $\int x^2(2x^3+4)^{2004} dx, I := \mathbb{R};$     (b)  $\int x^2\sqrt{6x^3+4} dx, I := \mathbb{R}^+;$

(c)  $\int e^x(1-e^x)^3 dx, I := \mathbb{R};$     (d)  $\int \sin^3 x \cos x dx, I := \mathbb{R};$

(e)  $\int \frac{\ln^5 x}{x} dx, I := \mathbb{R}^+;$     (f)  $\int \sqrt{\frac{\operatorname{arsh} x}{1+x^2}} dx, I := \mathbb{R}^+;$

(g)  $\int \frac{4x+7}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+5)^5}} dx, I := (-\frac{5}{2}, +\infty);$

(h)  $\int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}} dx, I := (0, \frac{\pi}{2});$

•  $\int f(ax+b) dx$  alakú integrálok

**F11.** Legyen  $I \subset \mathbb{R}$  egy intervallum és  $F : I \rightarrow \mathbb{R}$  a  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek egy primitív függvénye. Mutassa meg, hogy ekkor bármely  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R}$  esetén

$$\boxed{\int f(ax+b) dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c} \quad (x \in I).$$

**F12.** Az előző feladat eredményének felhasználásával számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

(a)  $\int (2x-3)^{10} dx \quad (x > \frac{3}{2});$     (b)  $\int \sqrt[3]{1-3x} dx \quad (x < \frac{1}{3});$

$$(c) \int \frac{1}{2+3x^2} dx \quad (x \in \mathbb{R}); \quad (d) \int \frac{1}{2-3x^2} dx \quad (x > \frac{2}{3});$$

$$(e) \int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} dx \quad (|x| < \sqrt{\frac{2}{3}}); \quad (f) \int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}} dx \quad (x > \sqrt{\frac{2}{3}}).$$

**F13.** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

$$(a) \int \frac{dx}{2x^2-12x+23} \quad (x \in \mathbb{R}); \quad (b) \int \frac{dx}{3x^2+12x+16} \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$(c) \int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+12x+30}} \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$(d) \int \frac{1}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx \quad (1-\sqrt{5} < x < 1+\sqrt{5}).$$

•  $\int f(g(x))g'(x) dx$  alakú integrálok

**F14.** Tegyük fel a következőket:

- (i) a  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  függvény deriválható az  $I$  intervallumon,
- (ii)  $J \subset \mathbb{R}$  egy intervallum és  $\mathcal{R}_g \subset J$ ,
- (iii) az  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$  függvénynek létezik primitív függvénye.

Ekkor az  $f \circ g \cdot g'$  függvénynek is létezik primitív függvénye és

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + c} \quad (x \in J),$$

ahol  $F$  a  $f$  egy primitív függvénye.

(Gondolja meg, hogy ez az állítás speciális esetként tartalmazza az **F7.**, **F9.** és **F11.** feladatok eredményeit!)

**F15.** Az előző feladat segítségével számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat az adott  $I$  intervallumokon:

$$(a) \int x \sin x^2 dx, \quad I := \mathbb{R}; \quad (b) \int \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$$

$$(c) \int (6x+2) \sin(3x^2+2x-1) dx, \quad I := \mathbb{R};$$

$$(d) \int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)} dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$$

$$(e) \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} dx, \quad I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(f) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx, \quad I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

### 1.2.3. Integrálás „ügyesen”

**F16.** Az integrandus „alkalmas” átalakítása után számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott  $I$  intervallumokon:

$$(a) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx, \quad I := \mathbb{R}; \quad (b) \int \frac{2x + 3}{x - 2} dx, \quad I := (2, +\infty);$$

$$(c) \int \frac{x}{4 + x^4} dx, \quad I := \mathbb{R}; \quad (d) \int x^3 \sqrt[3]{1 + x^2} dx, \quad I := \mathbb{R};$$

$$(e) \int \operatorname{tg} x dx, \quad I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right); \quad (f) \int \operatorname{tg}^2 x dx, \quad I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(g) \int \sin^2 x dx, \quad I := \mathbb{R}; \quad (h) \int \cos^3 x dx, \quad I := \mathbb{R};$$

$$(i) \int \sin 3x \cdot \cos 7x dx, \quad I := \mathbb{R}; \quad (j) \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx, \quad I := \mathbb{R};$$

$$(k) \int \sqrt{1 - \sin 2x} dx, \quad I := (0, \pi);$$

$$(l) \int \frac{\cos^2 x - 5}{1 + \cos 2x} dx, \quad I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(m) \int \frac{1}{\sin x} dx, \quad I := (0, \pi); \quad (n) \int \frac{1}{\cos x} dx, \quad I := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(o) \int \sin^2 x \cdot \cos^3 x dx, \quad I := \mathbb{R}; \quad (p) \int \sin^2 x \cos^4 x dx, \quad I := \mathbb{R}.$$

$$(q) \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg} x} dx, \quad I := \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right).$$

### 1.2.4. Parciális integrálás

**F17.** A parciális integrálás szabályát alkalmazva számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott  $I$  intervallumokon:

- (a)  $\int x e^{2x} dx, I := \mathbb{R};$  (b)  $\int x^2 \sin 3x dx, I := \mathbb{R};$   
 (c)  $\int e^x \sin x dx, I := \mathbb{R};$  (d)  $\int e^{2x} \operatorname{ch} 3x dx, I := \mathbb{R};$   
 (e)  $\int \ln x dx, I := \mathbb{R}^+;$  (f)  $\int \operatorname{arctg} 3x dx, I := \mathbb{R};$   
 (g)  $\int x^2 \ln x dx, I := \mathbb{R}^+;$  (h)  $\int x^5 e^{x^3} dx, I := \mathbb{R}.$

**F18.** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott  $I$  intervallumokon:

- (a)  $\int \cos(2x + 1) e^{3x+2} dx, I := \mathbb{R};$   
 (b)  $\int \frac{x^3}{\sqrt{4 + x^2}} dx, I := \mathbb{R};$  (c)  $\int \arcsin x dx, I := (-1, 1);$   
 (d)  $\int \cos(\ln x) dx, I := \mathbb{R}^+;$  (e)  $\int \ln \sqrt{x} dx, I := \mathbb{R}^+;$   
 (f)  $\int \cos x \ln(\sin x) dx, I := (0, \pi);$   
 (g)  $\int \frac{\ln x}{x} dx, I := \mathbb{R}^+;$  (h)  $\int x \ln^2 x dx, I := \mathbb{R}^+.$

**F19.** Legyen  $n \in \mathbb{N}$ , és tegyük fel, hogy az  $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  függvények  $n$ -szer deriválhatók és  $f^{(n)}, g^{(n)}$  folytonosak. Mutassa meg, hogy

$$\int f g^{(n)} = f g^{(n-1)} - f' g^{(n-2)} + \dots + (-1)^n \int f^{(n)} g.$$

**F20.** Igazolja, hogy tetszőleges  $n = 1, 2, \dots$  esetén

$$\begin{aligned} \int \sin^n x dx &= -\frac{1}{n} \cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \\ \int \cos^n x dx &= \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx. \end{aligned}$$

### 1.2.5. Integrálás helyettesítéssel

**F21.** Állítsa elő helyettesítéses integrálással a következő határozatlan integrálokat:

- (a)  $\int \sqrt{1-x^2} dx$  ( $x \in (-1, 1)$ ); (b)  $\int \sqrt{1+x^2} dx$  ( $x \in \mathbb{R}$ );  
 (c)  $\int \sqrt{x^2-1} dx$  ( $x > 1$ ); (d)  $\int \sqrt{x^2-1} dx$  ( $x < -1$ );  
 (e)  $\int \sqrt{x^2-3x+3} dx$  ( $x \in \mathbb{R}$ ); (f)  $\int \sqrt{1+x^2} x^5 dx$  ( $x \in \mathbb{R}$ );  
 (g)  $\int \sqrt{ax^2+bx+c} dx$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ).

### 1.2.6. Racionális függvények integrálása

**F22.** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat a megadott intervallumokon:

- (a)  $\int \frac{1}{x-3} dx$ ,  $x > 3$ ; (b)  $\int \frac{1}{x-3} dx$ ,  $x < 3$ ;  
 (c)  $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx$ ,  $I := \mathbb{R}$ ; (d)  $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3} dx$ ,  $I := \mathbb{R}$ ;  
 (e)  $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx$ ,  $I := \mathbb{R}$ ; (f)  $\int \frac{x+5}{x^2-x+5} dx$ ,  $I := \mathbb{R}$ ;  
 (g)  $\int \frac{6x}{x^2-2x+7} dx$ ,  $I := \mathbb{R}$ ; (h)  $\int \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$ ,  $I := \mathbb{R}$ ;

**F23.** Igazolja, hogy tetszőleges  $n = 1, 2, \dots$  esetén

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{1}{2n} \frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

**F24.** Parciális törtekre bontással számítsa ki a következő határozatlan integrálokat a megadott intervallumokon:

- (a)  $\int \frac{1}{(x-2)(x-4)} dx$ ,  $I := (2, 4)$ ;  
 (b)  $\int \frac{1}{1-x^2} dx$ ,  $I := (1, +\infty)$ ; (c)  $\int \frac{1}{1-x^2} dx$ ,  $I := (-1, 1)$ ;

- (d)  $\int \frac{x^3 - 4}{5x^3 - x} dx, \quad I := (0, \frac{1}{\sqrt{5}});$
- (e)  $\int \frac{1}{x(x^2 + 4)} dx, \quad I := \mathbb{R}^+;$
- (f)  $\int \frac{1}{x^3 + 1} dx, \quad I := (-1, +\infty);$
- (g)  $\int \frac{4x^2 - 8x}{2x^2 + x - 3} dx, \quad I := (-1, \frac{3}{2});$
- (h)  $\int \frac{4x^2 - 8x}{(x - 1)^2(1 + x^2)^2} dx, \quad I := (1, +\infty);$
- (i)  $\int \frac{1}{1 + x^4} dx, \quad I := \mathbb{R};$

### 1.2.7. Racionális függvények integrálására vezető helyettesítések

**F25.** Alkalmos helyettesítéssel vezesse vissza az alábbi integrálokat racionális függvények integráljára:

- (a)  $\int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx \quad (x > 0);$       (b)  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx \quad (x > 0);$
- (c)  $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx \quad (x > 0);$       (d)  $\int \frac{x^{2/3}}{1 + x^{1/7}} dx \quad (x > 0);$
- (e)  $\int \sqrt{\frac{x-3}{x-1}} dx \quad (x < 1);$       (f)  $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \quad (-1 < x < 1);$
- (g)  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2x-3}{x}} dx \quad (x > \frac{3}{2});$       (h)  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2x-3}{x}} dx \quad (x < 0);$
- (i)  $\int \frac{1}{x^2} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} dx \quad (-1 < x < 0).$

**F26.** Alkalmos helyettesítéssel számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat úgy, hogy visszavezeti racionális függvények integráljára:

- (a)  $\int \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} dx \quad (0 < x < 2\pi);$

$$(b) \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} dx \quad (-\pi < x < \pi);$$

$$(c) \int \frac{2}{1 + 2\operatorname{tg} x} dx \quad (0 < x < \frac{\pi}{2}).$$

**F27.** Oldja meg az előző feladatot „ügyesen” is. Alkalmazza a következő azonosságokat:

$$(a) \frac{1 + \sin x}{1 - \cos x} = \frac{1}{1 - \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{\sin x}{1 - \cos x};$$

$$(b) \frac{\cos x}{1 + \cos x} = 1 - \frac{1}{1 + \cos x} = 1 - \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}};$$

$$(c) \frac{2}{1 + 2\operatorname{tg} x} = \frac{2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x} = \frac{2}{5} \left( 1 + 2 \frac{-\sin x + 2 \cos x}{\cos x + 2 \sin x} \right).$$

A végeredményeket hasonlítsa össze az előző feladatban kapott végeredményekkel.

**F28.** Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat:

$$(a) \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \pi\right);$$

$$(b) \int \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx \quad \left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right);$$

$$(c) \int \frac{1}{3 + 5 \cos x} dx \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(d) \boxed{\text{L-Sch}} \text{ 264. oldal 8. feladat.}$$

**F29.** Alkalmos helyettesítéssel számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat úgy, hogy visszavezeti racionális függvények integráljára:

$$(a) \int \frac{4}{e^{2x} - 4} dx \quad (x > \ln 2); \quad (b) \int \frac{e^{3x}}{e^x + 2} dx \quad (x \in \mathbb{R});$$

$$(c) \int \frac{e^x + 4}{e^{2x} + 4e^x + 3} dx \quad (x \in \mathbb{R});$$

## Elemi függvények

## 2. A határozott integrál

### 2.1. A határozott integrál értelmezése

**F30.** Mutassa meg, hogy a Dirichlet-függvény nem Riemann-integrálható a  $[0, 1]$  intervallumon.

**F31.** Adjon meg olyan  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt, amelyik nem Riemann-integrálható  $[a, b]$ -n, de  $|f|$  már Riemann-integrálható  $[a, b]$ -n.

**F32.** A definíció alapján számítsa ki a következő határozott integrálokat:

$$(a) \int_1^2 x^2 dx, \quad (b) \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx.$$

**F33.** Mutassa meg, hogy az  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  korlátos függvény akkor és csak akkor Riemann-integrálható a kompakt  $[a, b]$  intervallumon, és az integrál értéke az  $I$  valós szám, ha az  $[a, b]$  intervallumnak **van olyan** felosztássorozata, amelyhez tartozó alsó- és felső közelítő összegek sorozata konvergens, és mindkettőnek az  $I$  szám a határértéke. Jelekkel:

$$f \in R[a, b] \text{ és } \int_a^b f = I \Leftrightarrow \begin{cases} \text{ha } [a, b]\text{-nek } \exists (\tau_n) \text{ felosztássorozata, amelyre} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, \tau_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \tau_n) = I. \end{cases}$$

**F34.** Az előző feladat állítását felhasználva igazolja, hogy

$$(a) \int_a^b e^x dx = e^b - e^a \quad (a < b);$$

$$(b) \int_a^b x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (0 < a < b, \alpha \neq -1 \text{ valós szám});$$

$$(c) \int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln b - \ln a \quad (a < b).$$

**F35.** Mutassa meg, hogy ha  $f$  akkor és csak akkor Riemann-integrálható a kompakt  $[a, b]$  intervallumon és az integrál értéke  $I$ , ha bármely minden határon túl finomodó  $(\tau_n)$  felosztássorozat esetén

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(f, \tau_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f, \tau_n) = I.$$

**F36.** Bizonyítsa be, hogy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \ln 2.$$

**F37.** Lássa be, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & \text{ha } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, (p, q) = 1 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Riemann-függvény Riemann-integrálható  $[0, 1]$ -en és  $\int_0^1 f = 0$ .

## 2.2. A határozott integrál tulajdonságai és kiszámítása

**F38.** Adjon meg olyan Riemann-integrálható függvényt, amelyiknek nincs primitív függvénye.

**F39.** Mutassa meg, hogy ha  $f$  folytonos az  $[a, b]$  intervallumon és itt  $f \geq 0$ , akkor

$$\int_a^b f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \equiv 0 \quad \text{az } [a, b]\text{-n.}$$

**F40.** A Newton–Leibniz-tétel felhasználásával számítsa ki az alábbi határozott integrálokat:

(a)  $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}};$

(b)  $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx;$

(c)  $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2};$

(d)  $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5};$

(e)  $\int_0^\pi e^x \sin x dx;$

(f)  $\int_1^e \ln x dx;$

(g)  $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}};$

(h)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx.$

**F41.** Alkalmasan megválasztott függvények határozott integráljának felhasználásával számítsa ki az alábbi határértékeket:

$$(a) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k};$$

$$(b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{10}} \sum_{k=1}^n k^9;$$

$$(c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} \right);$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} \right);$$

$$(e) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} \quad (\alpha > 0).$$

**F42. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség:** Tetszőleges  $f, g \in R[a, b]$  függvények esetén

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}.$$

**F43.** Számítsa ki az

$$I_n := \int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

integrálokat. (Keressen  $I_n$ -re rekurziós formulát.)

**F44.** Bizonyítsa be, hogy ha  $f$  folytonos a  $[0, 1]$  intervallumon, akkor

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx.$$

**F45.** Lássa be, hogy

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m dx = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

**F46.** Bizonyítsa be, hogy

$$B(m, n) := \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \quad (m, n \in \mathbb{N}).$$

**F47.** Igazolja, hogy ha  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  egy folytonos függvény, akkor

$$\int_0^x f(u)(x-u) du = \int_0^x \left( \int_0^u f(t) dt \right) du.$$

**F48.** Bizonyítsa be az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$(a) \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^6}} dx \leq \frac{1}{4},$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin x} dx \leq \frac{\pi}{2r} (1 - e^{-r}), \quad \text{ahol } r > 0 \text{ valós szám,}$$

$$(c) \int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx \leq 0,7, \quad (d) \int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq \sqrt{\frac{6}{5}},$$

$$(e) \frac{\sqrt{3}}{8} \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

**F49.** Határozza meg az alábbi minimumokat:

$$(a) \min \left\{ \int_0^1 |x^2 - c| dx : c \in \mathbb{R} \right\};$$

$$(b) \min \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x - ax - b)^2 dx : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

**F50.** Keresse meg azokat az  $a < b$  valós számokat, amelyekre az  $\int_a^b (2+x-x^2) dx$  integrál értéke maximális.

**F51.** Igazolja, hogy  $f \in D[0, 1]$ ,  $f' > 0$  esetén

$$\min \left\{ \int_0^1 |f - c| : c \in \mathbb{R} \right\} = \int_0^1 \left| f - f\left(\frac{1}{2}\right) \right|.$$

**F52.** Keresse meg a következő határértékeket:

$$(a) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3} dt,$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{x}{x-3} \int_3^x \frac{\sin t}{t} dt \right).$$

**F53.** Mutassa meg, hogy az  $f(x) := \int_0^x x^2 \sin(t^2) dt$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) függvény deriválható, és számítsa ki a deriváltfüggvényt.

**F54.** Tegyük fel, hogy  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  olyan folytonos függvény, amelyre

$$x \sin \pi x = \int_0^{x^2} f(t) dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül. Mennyi az  $f$  értéke a 4 pontban?

**F55.** Bizonyítsa be a következő állításokat:

(a) Ha  $f$  monoton növekedő, akkor

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

(b) Ha  $f$  differenciálható és  $f'$  korlátos a  $[0, 1]$  intervallumon, akkor van olyan  $n$ -től független  $c > 0$  valós szám, amellyel az

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{c}{n}$$

egyenlőtlenség minden  $n \in \mathbb{N}$  számra teljesül.

### 2.3. A határozott integrál alkalmazásai

Síkidom területe

**A** Ha a korlátos  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény Riemann-integrálható az  $[a, b]$  intervallumon és  $f(x) \geq 0$  ( $x \in [a, b]$ ), akkor az  $f$  grafikonja alatti

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

síkidom területét így értelmezzük:

$$t(A) := \int_a^b f(x) dx.$$

Ha  $f \leq 0$  az  $[a, b]$  intervallumon, akkor a

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$$

síkidom területe:

$$t(B) := - \int_a^b f(x) dx.$$

**B** Legyen

$$\begin{aligned} x &= \varphi_1(t) & (t \in [\alpha, \beta]), \\ y &= \varphi_2(t) & (t \in [\alpha, \beta]) \end{aligned}$$

a sima elemi  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  görbe egy paraméteres előállítására. Tegyük még fel azt is, hogy  $\varphi_1$  szigorúan monoton növekvő és  $\varphi_2(t) \geq 0$  ( $t \in [\alpha, \beta]$ ). Ekkor a

$$C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \varphi_1(t), 0 \leq y \leq \varphi_2(t), t \in [\alpha, \beta]\}$$

síkidom területe:

$$t(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi_2(t) \varphi_1'(t) dt.$$

**C** Az

$$r = \varrho(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

polárkoordinátás alakban megadott görbe által meghatározott

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi; 0 \leq r \leq \varrho(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta\}$$

szektorszerű tartomány területe, ha  $\varrho$  integrálható:

$$T(E) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho^2(\varphi) d\varphi.$$

**F56.** Számolja ki az  $y = x - 1$  egyenletű egyenes és a az  $y^2 = 2x + 6$  egyenletű parabola által közrezárt síkidom területét.

**F57.** Határozza meg az  $y = x^4$  és az  $y = 4 - x^2$  görbék által meghatározott síkidom területét.

**F58.** Határozza meg az  $y = x^4$  és az  $y = 3x^2 - 2$  görbék által meghatározott síkidom területét.

**F59.** Számítsa ki az alábbi síkbeli halmazok területét:

(a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 4x - 4x^2\}$ ,

(b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \ln x\}$ ,

(c)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a, b > 0\}$ .

**F60.** Határozza meg az  $f$  és  $g$  függvények grafikonja által határolt síkrész területét:

(a)  $f(x) := \sqrt{2px}$  ( $x > 0, p > 0$ ),  $g(x) := \frac{x^2}{2p}$  ( $x \in \mathbb{R}, p > 0$ );

(b)  $f(x) := \frac{x^2}{3}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),  $g(x) := 4 - \frac{2}{3}x^2$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

**F61.** Szemléltesse az alábbi *paraméteres alakban* megadott síkbeli görbéket:

(a)  $x = \varphi_1(t) := \cos^3 t$  ( $t \in [0, 2\pi)$ ,

$y = \varphi_2(t) := \sin^3 t$  ( $t \in [0, 2\pi)$  (*asztrois*);

(b)  $x = \varphi_1(t) := 2 \cos t - \cos 2t$  ( $t \in [0, 2\pi)$ ,

$y = \varphi_2(t) := 2 \sin t - \sin 2t$  ( $t \in [0, 2\pi)$  (*kardiodid*);

Számítsa ki a görbék által meghatározott síkidomok területét.

**F62.** Szemléltesse az alábbi *polárkoordinátákban* megadott síkbeli görbéket:

(a)  $r = \varrho(\varphi) := \cos \varphi$  ( $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  (*kör*);

(b)  $r = \varrho(\varphi) := 2\sqrt{\cos 2\varphi}$  ( $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$  (*lemniskáta*).

Számítsa ki a görbék által meghatározott síkidomok területét.

Síkbeli görbe ívhossza

**[B]** Legyen  $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$  egy sima elemi görbe és  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a  $\Gamma$  egy paraméterezése. Ekkor a  $\Gamma$  görbe rektifikálható, és  $\Gamma$  ívhossza:

$$l(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi_1'(t)]^2 + [\varphi_2'(t)]^2} dt.$$

**A** Legyen  $\Gamma$  az  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható függvény grafikonja. Ekkor a  $\Gamma$  görbe rektifikálható, és ívhossza:

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt.$$

**C** Ha  $\varrho : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonosan differenciálható, akkor az

$$r = \varrho(\varphi) \quad (\alpha \leq \varphi \leq \beta)$$

polárkoordinátás alakban megadott  $\Gamma$  görbe rektifikálható és az ívhossza:

$$l(\Gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varrho^2(\varphi) + [\varrho'(\varphi)]^2} d\varphi.$$

**F63.** Határozza meg az alábbi függvények grafikonjának a hosszát:

(a)  $f(x) = \sqrt{x} \quad (1 \leq x \leq 2),$

(b)  $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{3/2} \quad (2 \leq x \leq 5),$

(c)  $f(x) = \ln x - \frac{x^2}{8} \quad (1 \leq x \leq 4),$

(d)  $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x} \quad (1 \leq x \leq 2).$

**F64.** Számítsa ki az alábbi *paraméteres alakban* megadott görbék ívhosszát:

(a)  $x = \varphi_1(t) := e^t \sin t, \quad y = \varphi_2(t) := e^t \cos t \quad (t \in [0, \pi/2]);$

(b)  $x = \varphi_1(t) := \cos 2t, \quad y = \varphi_2(t) := \sin t \quad (t \in [0, \pi/2]).$

**F65.** Határozza meg az alábbi *polárkoordinátás* alakban megadott görbék ívhosszát:

(a)  $r = \varrho(\varphi) := \sin^3 \frac{\varphi}{3} \quad (\varphi \in [0, 3\pi]);$

(b)  $r = \varrho(\varphi) := \frac{1}{\varphi} \quad (\varphi \in [\pi/2, \pi]).$

**Forgástest térfogata**

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos függvény és tegyük fel, hogy  $f \geq 0$  az  $[a, b]$  intervallumon. Az  $f$  grafikonjának az  $x$ -tengely körüli forgatásával adódó

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, \quad y^2 + z^2 \leq f(x)\}$$

forgástest térfogata:

$$V(H) := \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

**F66.** Határozza meg az  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény grafikonjának az  $x$ -tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát:

(a)  $f(x) := 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$  ( $x \in [-2, 2]$ );

(b)  $f(x) := \sin^2 x$  ( $x \in [0, \pi]$ );

(c)  $f(x) := xe^x$  ( $x \in [0, 1]$ ).

Forgástest felszíne

Legyen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  egy folytonosan differenciálható függvény és tegyük fel, hogy  $f \geq 0$  az  $[a, b]$  intervallumon. Az  $f$  grafikonjának az  $x$ -tengely körüli forgatásával adódó

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, y^2 + z^2 = f(x)\}$$

forgásfelület felszíne:

$$F(H) := 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

**F67.** Határozza meg az  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  függvény grafikonjának az  $x$ -tengely körüli megforgatásával adódó forgástest felszínét:

(a)  $f(x) := 3\sqrt{x(3 - x^2)}$  ( $x \in [0, 3]$ );

(b)  $f(x) := \sin x$  ( $x \in [0, \pi]$ );

(c)  $f(x) := \sqrt{x}$  ( $x \in [1, 4]$ ).

## 2.4. Impropius integrálok

**D1.** Tegyük fel, hogy az  $f$  függvény Riemann-integrálható a *tetszőleges*  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  intervallum ( $a$  lehet  $-\infty$  és  $b$  lehet  $+\infty$  is) minden *kompakt*  $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$  részintervallumán, és legyen  $c \in (a, b)$  egy *tetszőleges*, de rögzített pont. Az  $f$  függvényt **impropiusan integrálhatónak** nevezzük az  $(a, b)$  intervallumon

(vagy azt mondjuk, hogy  $f$  **impropius integrálja konvergens**  $(a, b)$ -n), ha léteznek és végesek az alábbi határértékek:

$$\lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^c f(x) dx \quad \text{és} \quad \lim_{s \rightarrow b-0} \int_c^s f(x) dx,$$

és  $f$  **impropius integrálján** ezek összegét értjük:

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{t \rightarrow a+0} \int_t^c f(x) dx + \lim_{s \rightarrow b-0} \int_c^s f(x) dx.$$

- T1.** Ha  $f$  impropiusan integrálható az  $(a, b)$  intervallumon, akkor az impropius integráljának az értéke független a definíciójában szereplő  $c \in (a, b)$  pont megválasztásától.
- T2.** Tegyük fel, hogy a korlátos  $f$  függvény Riemann-integrálható a kompakt  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  intervallumon. Ekkor  $f$  impropiusan is integrálható  $(a, b)$ -n és ezen az intervallumon az impropius integrálja megegyezik az  $f$  függvény  $[a, b]$ -n vett Riemann-integráljával.
- F68.** Vizsgálja meg az alábbi impropius integrálok konvergenciáját. Ha konvergens, akkor határozza meg az értékét:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}), & \text{(b)} \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}), \\ \text{(c)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}), & \text{(d)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx, \\ \text{(e)} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, & \text{(f)} \int_{-1}^1 \frac{1}{1-x^2} dx. \end{array}$$

- F69.** Döntse el, hogy az alábbi impropius integrálok közül melyek a konvergens. A konvergens esetén számolja ki az integrál értékét.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_{-\infty}^0 x e^x dx, & \text{(b)} \int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx, \\ \text{(c)} \int_0^1 \ln x dx, & \text{(d)} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx, \\ \text{(e)} \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx, & \text{(f)} \int_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^p x} dx \quad (p \in \mathbb{R}). \end{array}$$

**T3. Az összehasonlító kritérium:** Legyen  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  (ahol lehet  $a = -\infty$  és lehet  $b = +\infty$ ), és tegyük fel, hogy  $f$  is és  $g$  is Riemann-integrálható  $(a, b)$ -nek minden kompakt részintervallumán, továbbá

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad (x \in (a, b)).$$

Ha az  $\int_a^b g(x) dx$  improprius integrál konvergens, akkor az  $\int_a^b f(x) dx$  improprius integrál is konvergens (**majoránskritérium**).

Ha az  $\int_a^b f(x) dx$  improprius integrál divergens, akkor az  $\int_a^b g(x) dx$  improprius integrál is divergens (**minoránskritérium**).

**F70.** Döntse el, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek-e:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3}, & \text{(b)} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x + \sqrt[3]{x^2 + 1} + 5}, \\ \text{(c)} \int_1^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{1 + x^2} dx, & \text{(d)} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1}} dx, \\ \text{(e)} \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x} dx, & \text{(f)} \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5 + 1}} dx. \end{array}$$

**D2.** Akkor mondjuk, hogy az  $\int_a^b f(x) dx$  improprius integrál **abszolút konvergens**, ha az  $\int_a^b |f(x)| dx$  improprius integrál konvergens.

**T4.** Ha az  $\int_a^b f(x) dx$  improprius integrál abszolút konvergens, akkor konvergens is.

**F71.** Mutassa meg, hogy az alábbi improprius integrálok konvergensek:

$$\text{(a)} \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \quad \text{(b)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

**F72.** Bizonyítsa be, hogy

$$\text{(a)} \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx \text{ konvergens,} \quad \text{(b)} \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \text{ divergens.}$$

**T5.** Tegyük fel, hogy az  $f : [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  függvény folytonos, monoton csökkenő. Mutassa meg, hogy a  $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$  számsor konvergens vagy divergens aszerint,

hogy az  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  impropius integrál konvergens vagy divergens.

A tétel érvényben marad abban az esetben is, amikor  $f$  a fenti tulajdonságokkal a  $[k, +\infty)$  intervallumon ( $k \in \mathbb{N}$ ) rendelkezik. Ebben az esetben

$\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ , illetve  $\int_1^{+\infty} f(x) dx$  helyébe  $\sum_{n=k}^{+\infty} f(n)$ , illetve  $\int_k^{+\infty} f(x) dx$  értendő.

**F73.** Az előző tétel felhasználásával vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorokat:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}); \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

**F74.** Mutassa meg, hogy az

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

impropius integrál konvergens. Később majd meg fogjuk mutatni azt, hogy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

**F75.** (a) Bizonyítsa be, hogy minden  $x > 0$  valós számra az  $\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$  impropius integrál konvergens. A

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x \in \mathbb{R}^+)$$

függvényt **gammafüggvénynek** nevezzük.

(b) Igazolja, hogy

- (i)  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^+$ ),
- (ii) ha  $n = 1, 2, 3, \dots$ , akkor  $\Gamma(n+1) = n!$ .

## 2.5. Kiegészítések a differenciálszámításhoz és az integrálszámításhoz

**F76. A binomiális sor.** Tetszőleges  $\alpha \in \mathbb{R}$  esetén az

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

binomiális együtthatókkal képzett

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

hatványsor (ezt nevezzük **binomiális sornak**) minden  $|x| < 1$  esetén konvergens, és az összegfüggvénye az  $(1+x)^\alpha$  ( $x \in (-1, 1)$ ) függvény:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = (1+x)^\alpha \quad (x \in (-1, 1)).$$

**F77. A Wallis-formula:**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^2}{1^2} \cdot \frac{4^2}{3^2} \cdots \frac{(2n)^2}{(2n-1)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

**F78. A Stirling-formula:**

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1,$$

azaz  $n!$  közelítésére az alábbi formula érvényes:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

**F79.** Mutassa meg, hogy  $\pi$  irracionális szám.

## II. rész

# Megoldások



## 1. Primitív függvények (határozatlan integrálok)

### 1.1. A definíciók egyszerű következményei

- M1.**
- (a)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + c \quad (x \in (0, +\infty));$
- (b)  $\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + c \quad (x \in (-\infty, 0));$
- (c)  $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + c;$
- (d)  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c.$
- M2.**
- (a)  $\int \cos x dx = \sin x + c$  és  $\sin \frac{3}{4}\pi + c = 0 \implies c = -\frac{\sqrt{2}}{2};$   
 $\int_{\frac{3}{4}\pi} \cos x dx = \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}.$
- (b)  $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2} + c.$
- M3.**
- (a)  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \implies \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = f(x) = \sqrt{x} + c$  és  $f(4) = 1 \implies \sqrt{4} + c = 1 \Leftrightarrow 2 + c = 1 \Leftrightarrow c = -1$ , azaz  $f(x) = \sqrt{x} - 1.$
- (b)  $f'(x) = \frac{1}{1+x} \implies \int \frac{1}{1+x} dx = f(x) = \ln(1+x) + c$  és  $f(0) = 2 \implies \ln(0+1) + c = 2 \Leftrightarrow 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$ , azaz  $f(x) = \ln(x+1) + 2.$
- (c)  $f''(x) = x \implies \int x dx = f'(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$  és  $f'(0) = 2 \implies \frac{0^2}{2} + c_1 = 2 \Leftrightarrow c_1 = 2$  és  $f'(x) = \frac{x^2}{2} + 2 \implies \int (\frac{x^2}{2} + 2) dx = f(x) = \frac{x^3}{2 \cdot 3} + 2x + c_2$  és  $f(0) = -3 \implies \frac{0^3}{6} + 2 \cdot 0 + c_2 = -3 \Leftrightarrow c_2 = -3$  és  $f(x) = \frac{x^3}{6} + 2x - 3.$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad f''(x) = \frac{1}{x^2} &\Rightarrow \int \frac{1}{x^2} dx = f'(x) = -\frac{1}{x} + c_1 \text{ és } f'(2) = 0 \Rightarrow \\
 -\frac{1}{2} + c_1 = 0 &\Leftrightarrow c_1 = \frac{1}{2} \text{ és } f'(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \Rightarrow \int \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) dx = \\
 f(x) = -\ln x + \frac{x}{2} + c_2 \text{ és } f(1) = 0 &\Rightarrow -\ln 1 + \frac{1}{2} + c_2 = 0 \Leftrightarrow c_2 = -\frac{1}{2} \\
 \text{és } f(x) = -\ln x + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}. &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(e)} \quad f''(x) = 3e^x + 5 \sin x &\Rightarrow \int (3e^x + 5 \sin x) dx = f'(x) = \\
 = 3e^x - 5 \cos x + c_1 \text{ és } f'(0) = 2 &\Rightarrow 3e^0 - 5 \cos 0 + c_1 = 2 \Leftrightarrow \\
 c_1 = 4 \text{ és } f'(x) = 3e^x - 5 \cos x + 4 &\Rightarrow \int (3e^x - 5 \cos x + 4) dx = f(x) = \\
 = 3e^x - 5 \sin x + 4x + c_2 \text{ és } f(0) = 1 &\Rightarrow 3e^0 - 5 \sin 0 + 4 \cdot 0 + c_2 = 1 \Leftrightarrow \\
 c_2 = -2 \text{ és } f(x) = 3e^x - 5 \sin x + 4x - 2. &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(f)} \quad f'''(x) = \sin x &\Rightarrow \int \sin x dx = f''(x) = -\cos x + c_1 \text{ és } f''(0) = 1 \Rightarrow \\
 -\cos 0 + c_1 = 0 &\Leftrightarrow c_1 = 1 \text{ és } f''(x) = -\cos x + 1 \Rightarrow \int (1 - \cos x) dx = \\
 = f'(x) = x - \sin x + c_2 \text{ és } f'(0) = 1 &\Rightarrow 0 - \sin 0 + c_2 = 1 \Leftrightarrow \\
 c_2 = 1 \text{ és } f'(x) = x - \sin x + 1 &\Rightarrow \int (x - \sin x + 1) dx = f(x) = \\
 \frac{x^2}{2} + \cos x + x + c_3 \text{ és } f(0) = 1 &\Rightarrow \frac{0^2}{2} + \cos 0 + 0 + c_3 = 1 \Leftrightarrow \\
 c_3 = 0 \text{ és } f(x) = \frac{x^2}{2} + \cos x + x. &
 \end{aligned}$$

## 1.2. Primitív függvények meghatározására vonatkozó módszerek

### 1.2.1. Alapintegrálok

$$\text{M6. (a)} \quad \int (6x^2 - 8x + 3) dx = 2x^3 - 4x^2 + 3x + c,$$

$$\text{(b)} \quad \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c,$$

$$\text{(c)} \quad \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} dx = \int x^{\frac{7}{8}} dx = \frac{x^{\frac{15}{8}}}{\frac{15}{8}} + c,$$

$$(d) \int \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + c,$$

$$(e) \int \left(2x + \frac{5}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 2 \int x dx + 5 \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = x^2 + 5 \arcsin x + c.$$

### 1.2.2. Alapintegrálokra vezető típusok

•  $\int \frac{f'}{f}$  alakú integrálok

**M7.** Az  $\frac{f'}{f}$  függvény egy primitív függvénye  $\ln f$ , mert  $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$ . Mivel  $\frac{f'}{f}$  intervallumon értelmezett, ezért minden primitív függvénye  $\ln f$ -től egy konstansban különbözik.

**M8.** (a)  $\int \frac{x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+3} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+3) + c,$

(b)  $\int \frac{x-3}{x^2-6x+27} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x-6}{x^2-6x+27} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-6x+27),$

(c)  $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) + c,$

(d)  $\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{e^{3x}}{e^{3x}+5} dx = \frac{1}{3} \ln(e^{3x}+5) + c,$

(e)  $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln(-\ln x) + c,$

(f)  $\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln \ln(x) + c.$

•  $\int f^\alpha \cdot f'$  alakú integrálok

**M9.** M7-hez hasonlóan.

**M10.** (a)  $\int x^2(2x^3+4)^{2004} dx = \frac{1}{6} \int 6x^2(2x^3+4)^{2004} dx = \frac{1}{6} \frac{(2x^3+4)^{2005}}{2005} + c,$

(b)  $\int x^2 \sqrt{6x^3+4} dx = \frac{1}{18} \int 18x^2(6x^3+4)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{18} \frac{(6x^3+4)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c,$

(c)  $\int e^x(1-e^x)^3 dx = - \int (-e^x)(1-e^x)^3 dx = -\frac{(1-e^x)^4}{4} + c,$

$$(d) \int \sin^3 x \cos x dx = \int \sin^3 x (\cos x) dx = \frac{\sin^4 x}{4} + c,$$

$$(e) \int \frac{\ln^5 x}{x} dx = \int \frac{1}{x} \ln^5 x dx = \frac{\ln^6 x}{6} + c,$$

$$(f) \int \sqrt{\frac{\operatorname{arsh} x}{1+x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \operatorname{arsh}^{\frac{1}{2}} x dx = \frac{\operatorname{arsh}^{\frac{3}{2}} x}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2 \operatorname{arsh}^{\frac{3}{2}} x}{3} + c,$$

$$(g) \int \frac{4x+7}{\sqrt[4]{(2x^2+7x+5)^5}} dx = \int (4x+7) \cdot (2x^2+7x+5)^{-\frac{5}{4}} dx = \\ = -\frac{4}{\sqrt[4]{2x^2+7x+5}} + c,$$

$$(h) \int \frac{1}{\cos^2 x \sqrt{(\operatorname{tg} x)^3}} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (\operatorname{tg} x)^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{-2}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} + c.$$

•  $\int f(ax+b) dx$  alakú integrálok

**M11.** M7-hez hasonlóan.

$$\mathbf{M12.} \quad (a) \int (2x-3)^{10} dx = \frac{(2x-3)^{(10+1)}}{2 \cdot (10+1)} + c = \frac{(2x-3)^{11}}{22} + c,$$

$$(b) \int \sqrt[3]{1-3x} dx = \int (1-3x)^{\frac{1}{3}} dx = \frac{(1-3x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3} \cdot (-3)} + c = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{(1-3x)^4} + c,$$

$$(c) \int \frac{1}{2+3x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+\frac{3}{2}x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2} dx = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + c,$$

$$(d) \int \frac{1}{2-3x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1-\frac{3}{2}x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1-(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2} dx = \\ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\operatorname{arth} \sqrt{\frac{3}{2}}x}{\sqrt{\frac{3}{2}}} + c,$$

$$(e) \int \frac{1}{\sqrt{2-3x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + c,$$

$$(f) \int \frac{1}{\sqrt{3x^2-2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{\frac{3}{2}}x)^2 - 1}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{arch}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}x\right) + c.$$

**M13.** (a) 
$$\int \frac{dx}{2x^2 - 12x + 23} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - 6x + \frac{23}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{(x-3)^2 + \frac{5}{2}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \int \frac{1}{\frac{2}{5}(x-3)^2 + 1} dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{[\sqrt{\frac{2}{5}}(x-3)]^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{5}}(x-3)\right) + c,$$

(b) 
$$\int \frac{dx}{3x^2 + 12x + 16} = \int \frac{1}{3(x^2 + 4x) + 16} dx = \int \frac{1}{3(x+2)^2 + 4} dx =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{[\sqrt{\frac{3}{4}}(x+2)]^2 + 1} dx = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}\right) \frac{1}{2\sqrt{3}} + c,$$

(c) 
$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 12x + 30}} = \int \frac{1}{\sqrt{3(x+2)^2 + 18}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{18}} \int \frac{1}{\sqrt{[\sqrt{\frac{3}{18}}(x+2)]^2 + 1}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arsh}\left(\sqrt{\frac{3}{18}}(x+2)\right) + c,$$

(d) 
$$\int \frac{1}{\sqrt{4+2x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{-(x-1)^2 + 5}} dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - [\sqrt{\frac{1}{5}}(x-1)]^2}} dx = \arcsin\left(\sqrt{\frac{1}{5}}(x-1)\right) + c.$$

- $\int f(g(x))g'(x) dx$  alakú integrálok

**M14.** M7-hez hasonlóan.

**M15.** (a) 
$$\int x \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \sin x^2 dx = -\frac{\cos x^2}{2} + c,$$

$$(b) \int \frac{\operatorname{sh} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \operatorname{sh} \sqrt{x} dx = 2 \operatorname{ch} \sqrt{x} + c,$$

$$(c) \int (6x + 2) \sin(3x^2 + 2x - 1) dx = -\cos(3x^2 + 2x - 1) + c,$$

$$(d) \int \frac{1}{x(1 + \ln^2 x)} dx = \int \frac{1}{x} \frac{1}{1 + (\ln x)^2} dx = \operatorname{arctg}(\ln x) + c,$$

$$(e) \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} dx = \operatorname{arsh}(\operatorname{tg} x) + c,$$

$$(f) \int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} e^{\operatorname{tg} x} dx = e^{\operatorname{tg} x} + c.$$

### 1.2.3. Integrálás „ügyesen”

$$\mathbf{M16.} \quad (a) \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 + 1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1 + x^2}\right) dx = x - \operatorname{arctg}(x) + c,$$

$$(b) \int \frac{2x + 3}{x - 2} dx = \int \frac{2x - 4 + 7}{x - 2} dx = \int \left(2 + \frac{7}{x - 2}\right) dx = \\ = \int 2 dx + 7 \int \frac{1}{x - 2} dx = 2x + 7 \ln(x - 2) + c,$$

$$(c) \int \frac{x}{4 + x^4} dx = \int x \frac{1}{4 + (x^2)^2} = \frac{1}{4} \int x \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(x^2)^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} + c,$$

$$(d) \int x^3 \sqrt[3]{1 + x^2} dx = \int [x(1 + x^2) - x] \sqrt[3]{1 + x^2} dx = \\ = \int x(1 + x^2)^{1 + \frac{1}{3}} dx - \int x \sqrt[3]{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x(1 + x^2)^{\frac{4}{3}} dx - \\ - \frac{1}{2} \int 2x \sqrt[3]{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} \frac{(1 + x^2)^{\frac{7}{3}}}{\frac{7}{3}} - \frac{1}{2} \frac{(1 + x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c,$$

$$(e) \int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln \cos x + c,$$

$$(f) \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \\ = \operatorname{tg} x - x + c,$$

$$(g) \int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \int \frac{\cos 2x}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c,$$

$$\begin{aligned} \text{(h)} \quad \int \cos^3 x \, dx &= \int \cos x \cdot (\cos^2 x) \, dx = \int \cos x \cdot (1 - \sin^2 x) \, dx = \\ &= \int \cos x \, dx - \int \cos x \cdot \sin^2 x \, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \text{a } \sin \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{2} \text{ azonosság alapján} \\ \int \sin 3x \cdot \cos 7x \, dx &= \int \frac{\sin 10x + \sin(-4x)}{2} \, dx = \\ &= \int \frac{\sin 10x - \sin(4x)}{2} \, dx = \frac{1}{2} \cdot \int \sin 10x \, dx - \frac{1}{2} \cdot \int \sin 4x \, dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 10x}{10} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 4x}{4} + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(j)} \quad \text{most a } \cos \alpha \cdot \cos \beta &= \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \text{ azonosságot alkalmazzuk:} \\ \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \, dx &= \frac{1}{2} \int [\cos(\frac{x}{2} + \frac{x}{3}) + \cos(\frac{x}{2} - \frac{x}{3})] \, dx = \\ &= \frac{3}{5} \cdot \sin \frac{5}{6}x + 3 \sin \frac{x}{6} + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(k)} \quad \int \sqrt{1 - \sin 2x} \, dx &= \int \sqrt{1 - 2 \sin x \cos x} \, dx = \\ &= \int \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin x \cos x} \, dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2} \, dx = \\ &= \int |\sin x - \cos x| \, dx = \int \begin{cases} \cos x - \sin x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \\ \sin x - \cos x, & \text{ha } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi, \end{cases} \\ \text{az } f(x) &:= \begin{cases} \sin x + \cos x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ -\cos x - \sin x + 2\sqrt{2}, & \text{ha } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \pi \end{cases} \\ &\text{függvény egy primitív függvény.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(l)} \quad \int \frac{\cos^2 x - 5}{1 + \cos 2x} \, dx &= \int \frac{\cos^2 x - 5}{\cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x - \sin^2 x} \, dx = \\ &= \int \frac{\cos^2 x - 5}{2 \cos^2 x} \, dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx - \frac{5}{2} \cdot \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \frac{x}{2} - \frac{5}{2} \cdot \operatorname{tg} x + c, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(m)} \quad \int \frac{1}{\sin x} \, dx &= \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \, dx = \int \frac{1}{2 \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \cos^2 \frac{x}{2}} \, dx = \\ &= \int \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \, dx = \ln(\operatorname{tg} \frac{x}{2}) + c. \end{aligned}$$

## 1.2.4. Parciális integrálás

$$\text{M17. (a) } \int x e^{2x} dx = \left( f(x) = x \implies f'(x) = 1, \quad g'(x) = e^{2x} \implies g(x) = \frac{1}{2} e^{2x} \right)$$

$$= x \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{4} e^{2x} + c.$$

$$\text{(b) } \int x^2 \sin 3x dx =$$

$$\left( f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x, \quad g'(x) = \sin 3x \implies g(x) = \frac{-\cos 3x}{3} \right)$$

$$= -x^2 \frac{\cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \int x \cos 3x dx =$$

$$\left( f(x) = x \implies f'(x) = 1, \quad g'(x) = \cos 3x \implies g(x) = \frac{\sin 3x}{3} \right)$$

$$= -\frac{x^2 \cos 3x}{3} + \frac{2}{3} \left[ \frac{x \sin 3x}{3} - \frac{1}{3} \int 1 \sin 3x dx \right] =$$

$$= \frac{-x^2 \cos 3x}{3} + \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2 \cos 3x}{9 \cdot 3} + c.$$

$$\text{(c) } \int e^x \sin x dx =$$

$$\left( f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \sin x \implies g(x) = -\cos x \right)$$

$$= -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$\left( f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x, \quad g'(x) = \cos x \implies g(x) = \sin x \right)$$

$$= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx; \text{ rendezés után kapjuk, hogy}$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{-e^x \cos x + e^x \sin x}{2} + c.$$

$$\text{(d) } \int e^{2x} \operatorname{ch} 3x dx \text{ parciális integrálással is meghatározható, de egyszerűbb}$$

a következő:

$$\int e^{2x} \operatorname{ch} 3x dx = \int e^{2x} \cdot \frac{e^{3x} + e^{-3x}}{2} dx = \int \left( \frac{e^{5x}}{2} + \frac{e^{-x}}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{e^{5x}}{10} - \frac{e^{-x}}{2} + c;$$

$$\begin{aligned}
 \text{(e)} \quad \int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx = \\
 &\left( g'(x) = 1, g(x) = x; f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x} \right) \\
 &= x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + c;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(f)} \quad \int \operatorname{arctg} 3x \, dx &= \int 1 \cdot \operatorname{arctg} 3x \, dx = \\
 &\left( g'(x) = 1, g(x) = x, f(x) = \operatorname{arctg} 3x, f'(x) = \frac{3}{1 + (3x)^2} \right) \\
 &= x \operatorname{arctg} 3x - \int \frac{3x}{1 + (3x)^2} \, dx = x \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6} \int \frac{18x}{1 + 9x^2} \, dx = \\
 &= x \operatorname{arctg} 3x - \frac{1}{6} \ln(1 + 9x^2) + c;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(g)} \quad \int x^2 \ln x \, dx &= \\
 &\left( g'(x) = x^2, g(x) = \frac{x^3}{3}; f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x} \right) \\
 &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + c;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(h)} \quad \int x^5 e^{x^3} \, dx &= \frac{1}{3} \int e^{x^3} 3x^2 x^3 \, dx \\
 &\left( g'(x) = e^{x^3} 3x^2, g(x) = e^{x^3}; f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2 \right) \\
 &= \frac{1}{3} \int e^{x^3} 3x^2 x^3 \, dx = \frac{1}{3} (e^{x^3} x^3 - \int e^{x^3} 3x^2 \, dx) = \frac{1}{3} e^{x^3} (x^3 - 1) + c.
 \end{aligned}$$

**M18.** (a)  $\int \cos(2x + 1)e^{3x+2} \, dx =$

$$\begin{aligned}
 &\left( f(x) = e^{3x+2}, f'(x) = 3e^{3x+2}; g'(x) = \cos(2x + 1), g(x) = \frac{\sin(2x + 1)}{2} \right) \\
 &= \frac{e^{3x+2} \sin(2x + 1)}{2} - \frac{3}{2} \int e^{3x+2} \sin(2x + 1) \, dx = \\
 &\left( f(x) = e^{3x+2}, f'(x) = 3e^{3x+2}; g'(x) = \sin(2x + 1), g(x) = -\frac{\cos(2x + 1)}{2} \right) \\
 &= e^{3x+2} \frac{\sin(2x + 1)}{2} - \frac{3}{2} \left[ \frac{-e^{3x+2} \cos(2x + 1)}{2} - \int \frac{-3e^{3x+2} \cos(2x + 1)}{2} \, dx \right] = \\
 &= e^{3x+2} \frac{\sin(2x + 1)}{2} + \frac{3}{4} e^{3x+2} \cos(2x + 1) - \frac{9}{4} \int e^{3x+2} \cos(2x + 1) \, dx,
 \end{aligned}$$

rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\int \cos(2x+1)e^{3x+2} dx = \frac{2e^{3x+2} \sin(2x+1) + 3e^{3x+2} \cos(2x+1)}{13} + c;$$

(b)  $x^3 = x(x^2 + 4 - 4),$

(c)  $\int \arcsin x dx = \int 1 \cdot \arcsin x dx =$   
 $\left( g'(x) = 1, g(x) = x; f(x) = \arcsin x, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$   
 $= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (-2x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx =$   
 $= x \arcsin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + c;$

(d)  $\int \cos(\ln x) dx = \int \cos(\ln x) \frac{1}{x} x dx =$   
 $\left( g'(x) = \cos(\ln x) \frac{1}{x}, g(x) = \sin(\ln x); f(x) = x, f'(x) = 1 \right)$   
 $= x \sin(\ln x) - \int \sin(\ln x) dx = x \sin(\ln x) + \int -\sin(\ln x) \frac{1}{x} x dx =$   
 $\left( g'(x) = -\sin(\ln x) \frac{1}{x}, g(x) = \cos(\ln x); f(x) = x, f'(x) = 1 \right)$   
 $= x \sin(\ln x) + x \cos(\ln x) - \int \cos(\ln x) dx \implies$   
 $\int \cos(\ln x) dx = \frac{x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))}{2} + c;$

(e)  $\int \ln \sqrt{x} dx = \int \ln(x^{\frac{1}{2}}) dx = \frac{1}{2} \int \ln x dx = \frac{1}{2}(x \ln x - x) + c \quad (F17/e);$

(f)  $\int \cos x \ln(\sin x) dx =$   
 $\left( g'(x) = \cos x, g(x) = \sin x; f(x) = \ln(\sin x), f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \right)$   
 $= \sin x \ln(\sin x) - \int \sin x \frac{\cos x}{\sin x} dx = \sin x \ln(\sin x) - \int \cos x dx =$   
 $= \sin x \ln(\sin x) - \sin x + c;$

(g)  $\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \frac{1}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c;$

$$\begin{aligned}
\text{(h)} \quad \int x \ln^2 x \, dx &= \\
&\left( g'(x) = x, \quad g(x) = \frac{x^2}{2}; \quad f(x) = \ln^2 x, \quad f'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \right) \\
&= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \frac{2 \ln x}{x} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \int x \ln x \, dx = \\
&\left( g'(x) = x, \quad g(x) = \frac{x^2}{2}; \quad f(x) = \ln x, \quad f'(x) = \frac{1}{x} \right) \\
&= \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \left( \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} \, dx \right) = \frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{x^2}{4} + c.
\end{aligned}$$

### 1.2.5. Integrálás helyettesítéssel

**M21.** Az elkövetkező feladatok megoldásához az alábbi összefüggés nyújt segítséget:

$$\boxed{\int f(x) \, dx = \int f(g(t))g'(t) \, dt \Big|_{t=g^{-1}(x)}}$$

Itt  $f$  egy  $I$  intervallumon adott (pl. folytonos) függvény,  $g : J \rightarrow I$  pedig egy szigorúan monoton (növekedő vagy csökkenő) differenciálható függvény a  $J$  intervallumon. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az  $x = g(t)$  *helyettesítést alkalmazzuk*. (Figyeljünk majd a  $g$  helyettesítő függvény szigorú monotonitásának az ellenőrzésére!)

**(a)** Most az  $x = \sin t =: g(t)$  helyettesítést alkalmazzuk. Mivel  $-1 \leq x \leq 1$ , ezért, ha  $g$ -t a  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  intervallumon tekintjük, akkor itt  $g$  szigorúan monoton növekedő, ezért a fenti képlet alkalmazható:

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt \Big|_{t=\arcsin x} = \int \cos^2 t \Big|_{t=\arcsin x} = \\
&= \left( \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_{t=\arcsin x} + c = \frac{\arcsin x}{2} - \frac{\sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x)}{2} + c = \\
&= \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c
\end{aligned}$$

**(b)** Itt az

$$x = \operatorname{sh} t =: g(t) \quad (t \in \mathbb{R}); \quad g \uparrow, \quad g'(t) = \operatorname{ch} t \quad (t \in \mathbb{R})$$

helyettesítést alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1+x^2} dx &= \int \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} \operatorname{ch} t dt \Big|_{t=\operatorname{arsh} x} = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} \operatorname{ch} t dt \Big|_{t=\operatorname{arsh} x} = \\ &= \int \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2} dt \Big|_{t=\operatorname{arsh} x} = \left( \frac{\operatorname{sh} 2t}{4} + \frac{t}{2} \right) \Big|_{t=\operatorname{arsh} x} + c = \left( \frac{\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t}{2} + \frac{t}{2} \right) \Big|_{t=\operatorname{arsh} x} + c = \\ &= \frac{x \operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)}{2} + \frac{\operatorname{arsh} x}{2} + c = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\operatorname{arsh} x}{2} + c; \end{aligned}$$

(c) Az  $\int \sqrt{x^2 - 1} dx$  ( $x > 1$ ) integrál kiszámításához alkalmazza az  $x = \operatorname{ch} t =: g(t)$  ( $t > 0$ ) helyettesítést.

(f) Alkalmazhatjuk az  $x = \operatorname{sh} x =: g(t)$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) helyettesítést.

A feladatot megoldhatjuk az  $x^5 = x \cdot x^4 = x[(x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) + 1]$  azonosság felhasználásával is. ■

### 1.2.6. Racionális függvények integrálása

- M22.** (a)  $\int \frac{1}{x-3} dx = \ln(x-3) + c$ , ha  $x \in (3, +\infty)$ ,
- (b)  $\int \frac{1}{x-3} dx = \ln(3-x) + c$ , ha  $x \in (-\infty, 3)$ ,
- (c)  $\int \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+3) + c$ ,
- (d)  $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+3} dx = \int \left( \frac{2x+2}{x^2+2x+3} + \frac{1}{x^2+2x+3} \right) dx =$   
 $= \ln(x^2+2x+3) + \int \frac{1}{(x+1)^2+2} dx = \ln(x^2+2x+3) +$   
 $+ \frac{1}{2} \int \frac{1}{[\frac{1}{\sqrt{2}}(x+1)]^2+1} dx = \ln(x^2+2x+3) + \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + c$ ,
- (e)  $\int \frac{1}{x^2+x+1} dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx = \frac{4}{3} \cdot \int \frac{1}{\left[\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot (x+\frac{1}{2})\right]^2+1} dx =$   
 $= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (x+\frac{1}{2})\right] + c$ ,
- (f)  $\int \frac{x+5}{x^2-x+5} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x+10}{x^2-x+5} dx =$   
 $= \frac{1}{2} \cdot \left[ \int \frac{2x-1}{x^2-x+5} dx + 11 \cdot \int \frac{1}{x^2-x+5} dx \right] = \frac{1}{2} \cdot [\ln(x^2-x+5) +$

$$\begin{aligned}
& + 11 \cdot \int \frac{1}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{19}{4}} dx = \frac{1}{2} \cdot [\ln(x^2 - x + 5) + \\
& + \frac{4}{19} \cdot 11 \cdot \int \frac{1}{[\frac{2}{\sqrt{19}}(x - \frac{1}{2})]^2 + 1} dx] = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 - x + 5) + \\
& + \frac{11 \cdot \sqrt{19}}{19} \cdot \arctan[\frac{2}{\sqrt{19}} \cdot (x - \frac{1}{2})] + c, \\
\text{(g)} \quad & \int \frac{6x}{x^2 - 2x + 7} dx = 3 \cdot \int \frac{2x - 2 + 2}{x^2 - 2x + 7} dx = 3 \cdot [\int \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 7} dx + \\
& + 2 \cdot \int \frac{1}{(x - 1)^2 + 6} dx] = 3 \cdot [\ln(x^2 - 2x + 7) + \frac{2}{6} \cdot \int \frac{1}{[\frac{1}{\sqrt{6}}(x - 1)]^2 + 1} dx = \\
& = 3 \cdot \ln(x^2 - 2x + 7) + \sqrt{6} \cdot \arctan[\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (x - 1)] + c. \blacksquare
\end{aligned}$$

**M23.** ...

**M24.** (a) Az integrandus felbontása „kis próbálkozással” is meghatározható:

$$\frac{1}{(x-2)(x-4)} \left( = \dots \frac{\dots}{x-2} \dots \frac{\dots}{x-4} \right) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-4} \right),$$

de a „biztos módszert” is alkalmazhatjuk: az

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(x-2)(x-4)} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4) + B(x-2)}{(x-2)(x-4)} = \\
&= \frac{(A+B)x - (4A+2B)}{(x-2)(x-4)}
\end{aligned}$$

alapján  $A + B = 0$ ,  $-(4A + 2B) = 1$  adódik, amiből  $A = -\frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{1}{2}$  következik. Ezért

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(x-2)(x-4)} dx &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-4} dx = \\
&= -\frac{1}{2} \ln(x-2) + \frac{1}{2} \ln(4-x) + c, \quad \text{ha } 2 < x < 4.
\end{aligned}$$

(e) Az integrandus így bontható fel:

$$\frac{1}{x(x^2+4)} \left( = \dots \frac{\dots}{x} \dots \frac{x+\dots}{x^2+4} \right) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4} \right).$$

Ezt a felbontást a „biztos módszerünkkel” így határozhatjuk meg: az

$$\begin{aligned}\frac{1}{x(x^2+4)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4) + x(Bx+C)}{x(x^2+4)} = \\ &= \frac{(A+B)x^2 + Cx + 4A}{x(x^2+4)}\end{aligned}$$

alapján  $A+B=0$ ,  $C=0$ ,  $4A=1$ , azaz  $A=\frac{1}{4}$ ,  $B=-\frac{1}{4}$ . Ezért

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x(x^2+4)} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{8} \int \frac{2x}{x^2+4} dx = \\ &= \frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{8} \ln(x^2+4) + c, \quad \text{ha } x > 0.\end{aligned}$$

(h) Az integrandus felbontása:

$$\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(1+x^2)^2} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{B_1x+C_1}{1+x^2} + \frac{B_2x+C_2}{(1+x^2)^2}.$$

Közös nevezőre hozás, majd a számlálóban a változó együtthatóinak összehasonlítása után egy 6 ismeretlenes egyenletrendszert kapunk az  $A_i, B_i, C_i$  ismeretlenekre.

A szóban forgó felbontást azonban így is meghatározhatjuk:

$$\begin{aligned}\frac{4x^2-8x}{(x-1)^2(1+x^2)^2} &= \frac{4}{(1+x^2)^2} - \left[ \frac{2}{(x-1)(1+x^2)} \right]^2 = \\ &= \frac{4}{(1+x^2)^2} - \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x+1}{1+x^2} \right)^2 = \\ &= \frac{4}{(1+x^2)^2} - \frac{(x+1)^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2(x+1)}{(x-1)(1+x^2)} = \\ &= \frac{4}{(1+x^2)^2} - \frac{x^2+2x+1}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} + 2 \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x}{1+x^2} \right) = \\ &= \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{2x+1}{1+x^2} - \frac{2x-4}{(1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

Az egyes tagok primitív függvényei innen már a „szokásos” módon határozhatók meg.

(i) Először a nevezőt kell felbontani tovább már nem bontható **valós** tényezők szorzatára. A felbontásban elsőfokú tényezők nyilván nem lesznek (az  $1 + x^4 = 0$  egyenletnek ui. nincs valós gyöke), ezért  $1 + x^4$  összeget két másodfokú tényező szorzatára kell felbontanunk. Ezt némi „ügyeskedéssel” így tehetjük meg:

$$\begin{aligned} 1 + x^4 &= 1 + 2x^2 + x^4 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \\ &= (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1). \end{aligned}$$

Így

$$\frac{1}{1 + x^4} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1},$$

amiből a „szokásos” módszerrel

$$A = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = \frac{1}{2}, \quad C = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D = \frac{1}{2}$$

adódik. Ezért

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1 + x^4} dx &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{x + \sqrt{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{2}(2x - \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} dx + \frac{1}{2\sqrt{2}} \int \frac{\frac{1}{2}(2x + \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} dx = \\ &= -\frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 - \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x^2 - 2\sqrt{2}x + 2} dx + \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + \frac{1}{2} \int \frac{1}{2x^2 + 2\sqrt{2}x + 2} dx = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\sqrt{2}x - 1)^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{(\sqrt{2}x + 1)^2 + 1} dx = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x - 1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x + 1) \right) + c. \blacksquare \end{aligned}$$

### 1.2.7. Racionális függvények integrálására vezető helyettesítések

**M25.** (b) 
$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx = \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}(1 + \sqrt[6]{x})} dx =$$

$$\left( t := \sqrt[6]{x}; x = t^6 =: g(t) \ (t > 0); \ g'(t) = 6t^5 \ (t > 0), \ g \uparrow \right)$$

$$= \int \frac{1}{t^2(1+t)} 6t^5 dt \Big|_{t=\sqrt[6]{x}} = 6 \int \frac{t^3}{1+t} dt \Big|_{t=\sqrt[6]{x}} =$$

$$= 6 \int \frac{(t^3+1)-1}{t+1} dt \Big|_{t=\sqrt[6]{x}} = 6 \int \left( t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt \Big|_{t=\sqrt[6]{x}} =$$

$$= \left( 6\frac{t^3}{3} - 6\frac{t^2}{2} + 6t - 6 \ln(1+t) + c \right) \Big|_{t=\sqrt[6]{x}} =$$

$$= 6\sqrt[6]{x} - 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 6 \ln(1 + \sqrt[6]{x}) + c;$$

(c) 
$$\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt[4]{x^3}} dx = \int \frac{(\sqrt[4]{x})^2}{1 + (\sqrt[4]{x})^3} dx =$$

$$\left( t := \sqrt[4]{x}; x = t^4 =: g(t) \ (t > 0); \ g'(t) = 4t^3 \ (t > 0); \ g \uparrow \right)$$

$$= \int \frac{t^2}{1+t^3} 4t^3 dt \Big|_{t=\sqrt[4]{x}} = 4 \int \frac{t^3+1-1}{t^3+1} t^2 dt \Big|_{t=\sqrt[4]{x}} =$$

$$= 4 \int \left( 1 - \frac{1}{t^3+1} \right) t^2 dt \Big|_{t=\sqrt[4]{x}} = 4 \int \left( t^2 - \frac{t^2}{t^3+1} \right) dt \Big|_{t=\sqrt[4]{x}} =$$

$$= 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3} \int \frac{3t^2}{t^3+1} dt \Big|_{t=\sqrt[4]{x}} = \left( \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3} \ln(t^3+1) + c \right) \Big|_{t=\sqrt[4]{x}} =$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3} \ln(\sqrt[4]{x^3} + 1) + c$$

(g) Tudjuk, hogy a

$$t = \sqrt{\frac{2x-3}{x}} = \sqrt{2 - \frac{3}{x}}$$

helyettesítés racionális törtfüggvény integrálására vezet. Ha  $x > \frac{3}{2}$ , akkor nyilván  $0 < t < \sqrt{2}$ , ami azt jelenti, hogy az

$$x = \frac{3}{2-t^2} =: g(t) \quad (t \in (0, \sqrt{2}))$$

helyettesítő függvényt alkalmazunk. Mivel

$$g'(t) = \frac{6t}{(2-t^2)^2} > 0 \quad (t \in (0, \sqrt{2})),$$

ezért  $g$  szigorúan monoton növekedő, így a határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabályunk valóban alkalmazható:

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2x-3}{x}} dx = \int \frac{2-t^2}{3} \cdot t \cdot \frac{6t}{(2-t^2)^2} dt \Big|_{t=\sqrt{\frac{2x-3}{x}}}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \int \frac{2-t^2}{3} \cdot t \cdot \frac{6t}{(2-t^2)^2} dt &= \int \frac{2t^2}{2-t^2} dt = \int \left( -2 + \frac{4}{(\sqrt{2}-t)(\sqrt{2}+t)} \right) dt = \\ &= -2t + \frac{4}{2\sqrt{2}} \int \left( \frac{1}{\sqrt{2}-t} + \frac{1}{\sqrt{2}+t} \right) dt = -2t + \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t} + c, \end{aligned}$$

ezért

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{2x-3}{x}} dx = -2\sqrt{\frac{2x-3}{x}} + \sqrt{2} \ln \frac{\sqrt{2x} + \sqrt{2x-3}}{\sqrt{2x} - \sqrt{2x-3}} + c \quad (x > \frac{3}{2}). \quad \blacksquare$$

## 2. A határozott integrál

### 2.1. A határozott integrál értelmezése

**M30.** ...

**M31.** Legyen  $f(x) = 1$ , ha  $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}$  és  $f(x) = -1$ , ha  $x \in [a, b] \cap \mathbb{Q}^*$ . ■

**M32.** A feladat (a) részében tekintse az  $[1, 2]$  intervallum egyenletes felosztásait. A (b) részben minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén vegye az  $[1, 2]$  intervallumnak azt a felosztását, amelyet az  $(\sqrt[n]{2})^i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) pontok határoznak meg.

(b) megoldása: Legyen  $f(x) := \frac{1}{x^2}$  ( $x \in [1, 2]$ ),  $q := \sqrt[n]{2}$ , és tekintsük az  $[1, 2]$  intervallum

$$\tau_n := \{x_i := q^i \mid i = 0, 1, \dots, n\}$$

felosztását. Az ehhez tartozó alsó közelítő összeg:

$$\begin{aligned} s(f, \tau_n) &= \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{q^{2i}}(q^i - q^{i-1}) = \\ &= \frac{q-1}{q^2} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{q}\right)^i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Hasonlóan a  $\tau_n$  felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg:

$$\begin{aligned} S(f, \tau_n) &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{q^{2(i-1)}}(q^i - q^{i-1}) = \\ &= (q-1) \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{q}\right)^{i-1} = \frac{1}{2} \cdot q = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Mivel

$$\frac{1}{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, \tau_n) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \tau_n) = \frac{1}{2},$$

ezért  $I_*(f) = I^*(f) = \frac{1}{2}$ . Az  $f$  függvény tehát integrálható az  $[1, 2]$  intervallumon, és  $\int_1^2 f = \frac{1}{2}$ . ■

**M33.**  $\Rightarrow$  Ha  $f \in R[a, b]$  és  $\int_a^b f = I$ , akkor  $I_*(f) = I^*(f) = I$ , ezért minden  $n \in \mathbb{N}$  számhoz létezik  $[a, b]$ -nek olyan  $\tau_n$  felosztása, amelyre

$$I - \frac{1}{n} \leq s(f, \tau_n) \leq I_*(f) = I^*(f) \leq S(f, \tau_n) \leq I + \frac{1}{n}.$$

A  $(\tau_n)$  felosztássorozatra tehát  $\lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, \tau_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \tau_n) = I$  teljesül.

$\Leftarrow$  Ha  $[a, b]$ -nek van olyan  $(\tau_n)$  felosztássorozata, amelyre

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, \tau_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \tau_n) = I$$

teljesül, akkor az

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, \tau_n) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \tau_n) = I$$

egyenlőtlenségekből következik, hogy  $I_*(f) = I^*(f) = I$ , azaz  $f$  Riemann-integrálható az  $[a, b]$  intervallumon és  $\int_a^b f = I$ . ■

**M34.** A feladat (a) részében tekintse az  $[a, b]$  intervallum egyenletes felosztásait. A (b) és (c) részben minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén vegye az  $[a, b]$  intervallumnak azt a felosztását, amelyet az  $(\sqrt[n]{\frac{b}{a}})^i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) pontok határozzák meg.

(c) megoldása: Legyen  $f(x) := \frac{1}{x}$  ( $x \in [a, b]$ ),  $q := \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ , és tekintsük az  $[a, b]$  intervallum

$$\tau_n := \{x_i := q^i \mid i = 0, 1, \dots, n\}$$

felosztását. Az ehhez tartozó alsó közelítő összeg:

$$s(f, \tau_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{q^i} (q^i - q^{i-1}) = n \left(1 - \frac{1}{q}\right) = n \left(1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right).$$

A sorozat határértékének a meghatározásához vegyük észre, hogy

$$n \left(1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right) = -\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}},$$

és ennek határértéke a  $g(x) := \left(\frac{a}{b}\right)^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) exponenciális függvény 0 pontbeli deriváltjával hozható kapcsolatba. Mivel  $g \in D\{0\}$  és  $g'(0) = \ln \frac{a}{b}$ , ezért

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(f, \tau_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right) = -g'(0) = -\ln \frac{a}{b} = \ln \frac{b}{a}.$$

A  $\tau_n$  felosztáshoz tartozó felső közelítő összeg:

$$S(f, \tau_n) = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{q^{i-1}}(q^i - q^{i-1}) = n(q-1) = n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right).$$

Mivel a  $h(x) := \left(\frac{b}{a}\right)^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) függvény deriválható, és  $h'(0) = \ln \frac{b}{a}$ , ezért

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(f, \tau_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n\left(1 - \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{1/n} - 1}{1/n} = h'(0) = \ln \frac{b}{a}.$$

Azt kaptuk tehát, hogy az  $[a, b]$  intervallumnak van olyan felosztássorozata, amelyhez tartozó alsó- és felső közelítő összegek sorozata ugyanahhoz a számhoz tart. Alkalmazzuk most az előző feladat állítását. ■

**M35.** ...

**M36.** A sor Leibniz-típusú sor, tehát konvergens. Itt a hangsúly az összeg meghatározásán van. Ehhez tekintse a következő „cseles” átalakításokat:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \\ & = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) = \\ & = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \\ & = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right). \end{aligned}$$

Ez utóbbi az  $\frac{1}{x}$  ( $x \in \mathbb{R}^+$ ) függvénynek az  $[1, 2]$  intervallum  $n$  egyenlő részre való felosztásával vett alsó közelítő összege. Az **F34.** feladat (c) része alapján ez a függvény integrálható, és  $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$ . Az előző feladat állítását felhasználva kapjuk a bizonyítandó egyenlőséget. ■

**M37.** Mivel minden intervallumban van irracionális szám és így olyan, ahol  $f$  értéke 0, ezért a  $[0, 1]$  intervallum tetszőleges  $\tau$  felosztása esetén  $s(f, \tau) = 0$ , tehát  $I_*(f) = \sup\{s(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}([a, b])\} = 0$ . Azt kell megmutatni, hogy

$$I^*(f) = \inf\{S(f, \tau) \mid \tau \in \mathcal{F}([a, b])\} = 0$$

is igaz.  $I^*(f) = 0$  azt jelenti, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists \tau \in \mathcal{F}([0, 1]) : S(f, \tau) < \varepsilon.$$

Adott  $\varepsilon > 0$  számhoz egy ilyen  $\tau$  felosztást a következőképpen adhatunk meg. Vegyünk egy olyan  $n \in \mathbb{N}$  számot, amelyre  $\frac{3}{n} < \varepsilon$  teljesül. Vegyük észre, hogy a függvény  $\frac{1}{n}$ -nél nagyobb értéket  $n^2$ -nél kevesebb helyen vesz fel. (Ugyanis, ha  $f(x) \geq \frac{1}{n}$ , akkor  $x = \frac{p}{q}$  és  $q \leq n$  kell, hogy legyen, márpedig minden  $q \leq n$ -hez  $n$ -nél kevesebb  $p$  van, amelyre  $0 < \frac{p}{q} < 1$  és  $(p, q) = 1$ .) Ezért tekintsük  $[0, 1]$ -nek az  $n^3$  egyenlő részre való  $\tau_n$  felosztását. Mutassa meg, hogy  $S(f, \tau_n) < \frac{3}{n}$ . ■

## 2.2. A határozott integrál tulajdonságai és kiszámítása

M38. ...

M39. ...

M40. (a) 
$$\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{9-(x-2)^2}} dx = \arcsin \frac{x-2}{3} + c,$$

$$\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx = \left[ \arcsin \frac{x-2}{3} \right]_2^5 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

(b) 
$$\frac{\sin(\ln x)}{x} dx = -\cos(\ln x) + c, \quad \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx = 1 - \cos 1.$$

(g) Először az integrandus primitív függvényeit határozzuk meg. Alkalmazzuk a

$$t = \sqrt{3x+1}, \quad 0 \leq x \leq 5, \quad 1 \leq t \leq 4$$

helyettesítést, azaz tekintsük az

$$x = \frac{t^2 - 1}{3} =: g(t) \quad (1 \leq t \leq 4)$$

helyettesítő függvényt. A  $g$  függvény szigorúan monoton növekedő az  $[1, 4]$  intervallumon, deriválható és  $g'(t) = \frac{2}{3}t$  ( $t \in [1, 4]$ ), ezért a határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabályt alkalmazhatjuk:

$$\int \frac{dx}{2x + \sqrt{3x+1}} = \int \frac{1}{\frac{2}{3}(t^2 - 1) + t} \cdot \frac{2}{3}t dt \Big|_{t=\sqrt{3x+1}}.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\frac{2}{3}(t^2 - 1) + t} \cdot \frac{2}{3}t dt &= \int \frac{2t}{2t^2 + 3t - 2} dt = \int \frac{2t}{(2t - 1)(t + 2)} dt = \\ &= \int \left[ \frac{A}{2t - 1} + \frac{B}{t + 2} \right] dt = \dots = \\ &= \frac{2}{5} \int \frac{1}{2t - 1} dt + \frac{4}{5} \int \frac{1}{t + 2} dt = \frac{1}{5} \ln(2t - 1) + \frac{4}{5} \ln(t + 2) + C, \end{aligned}$$

ezért

$$\int \frac{dx}{2x + \sqrt{3x + 1}} dx = \frac{1}{5} \ln(2\sqrt{3x + 1} - 1) + \frac{4}{5} \ln(\sqrt{3x + 1} + 2) + C.$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján tehát

$$\int_0^5 \frac{dx}{2x + \sqrt{3x + 1}} dx = \frac{1}{5} \left[ \ln(2\sqrt{3x + 1} - 1) + 4 \ln(\sqrt{3x + 1} + 2) \right]_0^5 = \frac{\ln 112}{5}.$$

(h) Először az integrandus primitív függvényeit határozzuk meg. Most a

$$t = \sqrt{e^x - 1}, \quad 0 \leq x \leq \ln 2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

helyettesítéssel *próbálkozunk*, azaz vesszük az

$$x = \ln(1 + t^2) =: g(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

helyettesítő függvényt. A  $g$  függvény deriválható és  $g'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$  ( $t \in [0, 1]$ ),  $g$  tehát szigorúan monoton növekedő. A határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabály tehát alkalmazható:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{e^x - 1} dx &= \int t \cdot \frac{2t}{1 + t^2} dt \Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} = 2 \int \left( 1 - \frac{1}{1 + t^2} \right) dt \Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} = \\ &= \left( 2t - 2 \operatorname{arctg} t \right) \Big|_{t=\sqrt{e^x-1}} = 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} + C. \end{aligned}$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján tehát

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx = \left[ 2\sqrt{e^x - 1} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{e^x - 1} \right]_0^{\ln 2} = 2 - \frac{\pi}{2}. \blacksquare$$

**M41.** (a) *megoldása:* Mivel

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+n}} = \\ & = \frac{1}{n} \left( \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n}}} \right), \end{aligned}$$

ezért ezt az összeget felfoghatjuk úgy is, mint az  $f(x) := \frac{1}{\sqrt{1+x}}$  ( $x > -1$ ) függvénynek a  $[0, 1]$  intervallum egyenletes felosztásához tartozó közelítő összege. Sőt ez  $f$  monoton csökkenése miatt egy alsó közelítő összeg. Az  $f$  függvény folytonos, tehát integrálható, és

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Az **F35.** feladat állítását felhasználva kapjuk, hogy a kért sorozat határértéke  $2(\sqrt{2} - 1)$ .

(e) *megoldása:* Mivel

$$a_n := \frac{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n}\right)^\alpha,$$

ezért

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \int_0^1 x^\alpha dx = \frac{1}{1+\alpha}.$$

**Megjegyzés.** Ez az eredmény azt jelenti, hogy minden  $\varepsilon > 0$  valós számhoz létezik olyan  $n_0 \in \mathbb{N}$  index, hogy minden  $n \geq n_0$  természetes számra fennállnak az

$$(1 - \varepsilon) \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} \leq 1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha \leq (1 + \varepsilon) \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

egyenlőtlenségek. Nagy  $n$ -ekre tehát az  $1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha$  összeg az  $\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}$  számmal jól közelíthető. Ezt úgy is ki szoktuk fejezni, hogy  $1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha$  *aszimptotikusan egyenlő*  $\frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1}$ -gyel, ha  $n \rightarrow +\infty$ , és ezt röviden így szokás jelölni:

$$1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha \sim \frac{1}{\alpha+1}n^{\alpha+1} \quad (n \rightarrow +\infty).$$

(Vagy azt mondjuk, hogy az  $1^\alpha + 2^\alpha + \dots + n^\alpha$  összeg  $n^{\alpha+1}$  nagyságrendű.) Figyelje meg, hogy ha  $\alpha = 1, 2$  vagy  $3$ , akkor a szóban forgó összegeket zárt alakban is fel tudjuk írni, és ebből kaphatunk információt arról, hogy az összeg nagy  $n$ -ekre mekkora. Más  $\alpha$ -kra (pl.  $\alpha = \frac{1}{2}$ ) zárt alak vagy nincs vagy pedig nehezen adható meg. A feladatban mutatott egyszerű eszközökkel tehát minden  $\alpha > 0$  valós szám esetén a zárt alak ismerete nélkül kaptunk információt az összeg nagy  $n$ -ekre való viselkedéséről. ■

**M42.** Ha  $\int_a^b f^2 = \int_a^b g^2 = 0$ , akkor az

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x)) \quad (x \in [a, b])$$

egyenlőtlenségből

$$0 \leq \left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{2} \left[ \int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \right] = 0$$

következik, tehát ekkor igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy  $\int_a^b f^2$  és  $\int_a^b g^2$  közül legalább az egyik 0-tól különböző, például  $\int_a^b f^2 > 0$ . Minden  $\lambda$  valós paraméter esetén az  $F := (\lambda f + g)^2$  függvény integrálható  $[a, b]$ -n, és az integrálja nemnegatív, azaz

$$0 \leq \int_a^b (\lambda f + g)^2 = \lambda^2 \int_a^b f^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b g^2 \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}).$$

A jobb oldal  $\lambda$ -nak egy másodfokú polinomja, és ez a polinom minden  $\lambda \in \mathbb{R}$  esetén nemnegatív, ami csak úgy lehetséges, ha a diszkriminánsa  $\leq 0$ , azaz

$$\left( 2 \int_a^b fg \right)^2 - 4 \left( \int_a^b f^2 \right) \left( \int_a^b g^2 \right) \leq 0,$$

amiből már következik az állítás. ■

**M43.**  $I_0 = \int_0^1 1 dx = 1$ . Ha  $n \geq 1$ , akkor

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-x^2)(1-x^2)^{n-1} dx = I_{n-1} - \int_0^1 x^2(1-x^2)^{n-1} dx = \\ &= I_{n-1} + \frac{1}{2} \int_0^1 x \cdot (-2x)(1-x^2)^{n-1} dx = \\ &= I_{n-1} + \frac{1}{2} \left[ x \cdot \frac{(1-x^2)^n}{n} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(1-x^2)^n}{n} dx = I_{n-1} - \frac{1}{2n} I_n, \end{aligned}$$

azaz

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Ezért

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2(n-1)}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \quad (n = 1, 2, \dots). \blacksquare$$

**M44.** Végezze el az  $x = 1 - t = g(t)$  ( $t \in [0, 1]$ ) helyettesítést.  $\blacksquare$

**M45.** ...

**M46.** Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \\ &= \left[ \frac{x^{m+1} (1-x)^n}{m+1} \right]_0^1 + \frac{n}{m+1} \int_0^1 x^{m+1} (1-x)^{n-1} dx = \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1). \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} B(m, n) &= \frac{n}{m+1} B(m+1, n-1) = \frac{n}{m+1} \cdot \frac{n-1}{m+2} \cdots \frac{1}{m+n} B(m+n, 0) = \\ &= \frac{n!}{(m+1) \cdots (m+n)} \int_0^1 x^{m+n} dx = \frac{n! m!}{(m+n+1)!}. \blacksquare \end{aligned}$$

**M47.** Integráljon parciálisan.  $\blacksquare$

**M48.** (a)  $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^6}} dx \leq \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}.$

(b) Mivel  $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$  ( $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ), ezért

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{r \sin x}} dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{r \frac{2}{\pi} x}} dx = \frac{\pi}{2r} \left[ -e^{-\frac{2r}{\pi} x} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2r} (1 - e^{-r}).$$

(c) Az integrálszámítás középértéktétele szerint létezik olyan  $\xi \in [0, 1]$ , amellyel

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{1+x^2} dx = \sin \xi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \sin \xi \left[ \arctg x \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} \sin \xi \leq \frac{\pi}{4} \sin 1 < 0,7.$$

(d) A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség alapján

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^4} dx \leq \sqrt{\int_0^1 (1+x^4) dx} \cdot \sqrt{\int_0^1 1 dx} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

(e) Legyen  $f(x) := \frac{\sin x}{x}$  ( $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ). Mivel  $f'(x) = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2}$  ( $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ) és  $x \leq \operatorname{tg} x$  minden  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$  pontban (a  $\operatorname{tg}$  függvény ui. konvex  $(0, \frac{\pi}{2})$ -en és a grafikonjának az érintője a 0 pontban az  $y = x$  egyenes), ezért  $f$  monoton csökkenő  $(0, \frac{\pi}{2})$ -en, ezért

$$\frac{\sqrt{3}}{8} = f\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{x} dx \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{6}. \blacksquare$$

**M52.** (a) Az integrandus folytonos, ezért az

$$F(x) := \int_2^x \sqrt{1+t^3} dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

integrálfüggvénye minden  $x \in \mathbb{R}$  pontban differenciálható és  $F'(x) = \sqrt{1+x^3}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ), következésképpen

$$F'(2) = \lim_{h \rightarrow 2} \frac{F(2+h) - F(h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_2^{2+h} \sqrt{1+t^3} dt = 3. \blacksquare$$

**M55.** (b) Jelölje  $M$  az  $|f'|$  egy felső korlátját:  $|f'(x)| \leq M$  ( $x \in [0, 1]$ ). Legyen  $n$  egy rögzített természetes szám, és tekintsük a  $[0, 1]$  intervallum  $\frac{k}{n}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ) osztópontokkal vett egyenletes felosztását. Ekkor

$$\int_0^1 f(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx,$$

ezért

$$\begin{aligned} \Delta &:= \left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx - \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx \right| = \\ &= \left| \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[ f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right] dx \right| \leq \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx. \end{aligned}$$

Alkalmazzuk most az  $f$  függvényre a  $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$  intervallumon a Lagrange-féle középértéktételt: van olyan  $\xi \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ , amelyre

$$f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) = f'(\xi)\left(x - \frac{k}{n}\right).$$

Az  $f'$  korlátossága miatt

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| dx \leq M \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(\frac{k}{n} - t\right) dt = \frac{M}{2n^2}.$$

Ezért a

$$\Delta \leq \frac{M}{2n^2} \cdot n = \frac{M}{2} \cdot \frac{1}{n}$$

egyenlőtlenség minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén teljesül. ■

## 2.3. A határozott integrál alkalmazásai

### 2.4. Improprius integrálok

### 2.5. Kiegészítések a differenciálszámításhoz és az integrálszámításhoz

**M76.** Ha  $\alpha$  nemnegatív egész szám, akkor a tagok bizonyos indextől kezdve 0-val egyenlők, így a sor konvergens. Ha  $\alpha$  nem ilyen, akkor egyik együttható sem 0, ezért a D'Alembert-féle hányadoskritérium és

$$\binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha - k}{k+1} \binom{\alpha}{k} \quad (*)$$

alapján

$$\left| \frac{\binom{\alpha}{k+1} x^{k+1}}{\binom{\alpha}{k} x^k} \right| = \left| \frac{\binom{\alpha}{k} \frac{\alpha-k}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}} \cdot x \right| = \left| \frac{\alpha-k}{k+1} x \right| \rightarrow |x|, \quad \text{ha } k \rightarrow +\infty,$$

ezért a sor valóban konvergens minden  $x \in (-1, 1)$  esetén.

Jelöljük  $f$ -fel a sor összegét:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad (x \in (-1, 1)).$$

Megmutatjuk, hogy  $f$  hasonló deriválási szabály érvényes, mint az  $(1+x)^\alpha$  ( $|x| < 1$ ) függvényre. Erre a függvényre ugyanis

$$\left((1+x)^\alpha\right)' = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \text{ azaz } (1+x)\left((1+x)^\alpha\right)' = \alpha(1+x)^\alpha$$

teljesül minden  $x \in (-1, 1)$  pontban. Ehhez hasonlóan fennáll az

$$(1+x)f'(x) = \alpha f(x) \quad (x \in (-1, 1)) \quad (**)$$

egyenlőség. Ez a hatványsor deriválására vonatkozó állítás és (\*) felhasználásával így igazolható:

$$\begin{aligned} (1+x)f'(x) &= (1+x) \sum_{k=1}^{+\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} = \sum_{k=1}^{+\infty} k \binom{\alpha}{k} x^{k-1} + \sum_{k=1}^{+\infty} k \binom{\alpha}{k} x^k = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[ (k+1) \binom{\alpha}{k+1} + k \binom{\alpha}{k} \right] x^k = \alpha \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = \alpha f(x). \end{aligned}$$

Ebből most már az  $f(x) = (1+x)^\alpha$  egyenlőség könnyen bizonyítható. Legyen ugyanis

$$g(x) := \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha} \quad (x \in (-1, 1)).$$

A  $g$  függvény deriválható és (\*\*) miatt

$$g'(x) = \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - f(x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = \frac{(1+x)f'(x) - \alpha f(x)}{(1+x)^\alpha} = 0,$$

ezért  $g$  állandó  $(-1, 1)$ -en. Az  $x = 0$  pontban  $g(0) = 1$ , ezért valóban fennáll az  $f(x) = (1+x)^\alpha$  ( $x \in (-1, 1)$ ) egyenlőség. ■

**M77.** Az állítást az

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

integrálok kiszámításán keresztül látjuk be.

Világos, hogy

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = \left[ -\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

ha  $n > 2$ , akkor parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x) \sin^{n-2} x \, dx = I_{n-2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^{n-2} x \cdot \cos x \, dx = \\ &= I_{n-2} - \left[ \frac{\sin^{n-1} x}{n-1} \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{n-1} x}{n-1} \sin x \, dx = I_{n-2} - \frac{1}{n-1} I_n, \end{aligned}$$

amiből

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots)$$

adódik.

$$\begin{aligned} I_{2n} &= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot I_0 \quad (I_0 = \frac{\pi}{2}), \\ I_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \cdot I_1 \quad (I_1 = 1). \end{aligned}$$

Mivel minden  $n$  természetes számra

$$\sin^{2n+2} x \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \quad (x \in (0, \pi/2)),$$

ezért

$$I_{2n+2} \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

azaz

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} \leq \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ebből

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \leq \frac{2^2}{1^2} \cdot \frac{4^2}{3^2} \cdots \frac{(2n)^2}{(2n-1)^2} \cdot \frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2}$$

**M78.** Az alapötlet az, hogy az  $\int_0^n \ln x \, dx$  integrált, azaz az  $\ln$  függvény  $[1, n]$  intervallumon vett grafikonja alatti területet a beírt trapézok területének összegével közelítjük.

A szóban forgó integrál könnyen meghatározható:

$$\int_1^n \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^n = n \ln n - n + 1 = \ln n^n - \ln e^n + \ln e = \ln \left( e \cdot \left( \frac{n}{e} \right)^n \right).$$

Tekintsük most az  $\ln$  (konkáv!) függvény grafikonjába beírt azon töröttvonalat, amelynek szögpontjai a görbe  $1, 2, \dots, n$  abszcisszákhöz tartozó pontjai. Az  $e$  töröttvonal alatti síkidom területe egy háromszögnek és  $(n-1)$  trapéznek a területéből tevődik össze, és az értéke:

$$\begin{aligned} & \frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 2 + \ln 3}{2} + \dots + \frac{\ln(n-1) + \ln 2}{2} = \\ & = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n - \frac{1}{2} \ln n = \ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}}\right), \end{aligned}$$

ezért a területek különbsége:

$$\Delta_n := \ln\left(e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n\right) - \ln\left(\frac{n!}{\sqrt{n}}\right) = \ln\left(\frac{e \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!}\right) > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

( $\Delta_n$  azért pozitív, mert az  $\ln$  függvény konkáv az egész  $\mathbb{R}^+$ -on.) A geometriai tartalomról nyilvánvaló, hogy a  $(\Delta_n)$  sorozat monoton növekedő. Egy szellemes geometriai megfontolásból az is következik, hogy a  $(\Delta_n)$  sorozat felülről korlátos és  $\Delta_n \leq \frac{\ln 2}{2}$  minden  $n \in \mathbb{N}$  esetén. Ezért a  $(\Delta_n)$  **sorozat konvergens**. Az  $\exp$  függvény szigorúan monoton növekedő, ezért az

$$\frac{e^{\Delta_n}}{e} = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}}{n!}$$

sorozat is konvergens, és a határértéke pozitív. A sorozat reciproka, tehát az

$$a_n := \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat is konvergens. Feladatunk a határértékének a kiszámolása.

Ehhez két **észrevételt** érdemes megjegyezni: egyrészt azt, hogy

$$0 < \lim(a_n) = \lim\left(\frac{a_n^2}{a_{2n}}\right),$$

ami az  $\frac{a_n^2}{a_{2n}} = a_n \cdot \frac{a_n}{a_{2n}}$  és  $\lim(a_n) = \lim(a_{2n})$  nyilvánvaló következménye. A másik észrevétel az, hogy  $\frac{a_n^2}{a_{2n}}$  a Wallis-formulával hozható kapcsolatba:

$$\begin{aligned} \frac{a_n^2}{a_{2n}} &= \frac{[n!]^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} n} \cdot \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2n}}{(2n)!} = \frac{[2^n n!]^2}{(2n)!} \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} = \\ &= \frac{[2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)]^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (2n)} \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}}. \end{aligned}$$

A Wallis-formula alapján

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

ezért

$$\begin{aligned} \lim(a_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}} = \lim\left(\frac{a_n^2}{a_{2n}}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \cdot \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot 2 = \sqrt{2\pi}, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = 1. \quad \blacksquare$$

**M79.** Elég igazolni azt, hogy  $\pi^2$  irracionális. Ezt indirekt módon látjuk be. Ha  $\pi^2$  racionális lenne, akkor léteznének olyan  $p, q \in \mathbb{N}$  számok, amelyekre  $\pi^2 = \frac{p}{q}$  teljesülne. Vegyünk most egy olyan  $n \in \mathbb{N}$  számot, amelyre

$$\pi p^n < n!$$

(ilyen van, miért?), és tekintsük az

$$f(x) := \frac{x^n(1-x)^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényt. Az indirekt feltételt felhasználva parciális integrálással mutassa meg, hogy

$$A := \pi p^n \int_0^1 f(x) \sin \pi x \, dx$$

egy *egész* szám. Ez viszont ellentmondás, mert

$$0 < A = \frac{\pi p^n}{n!} \int_0^1 x^n(1-x)^n \, dx \leq \frac{\pi p^n}{n!} < 1. \quad \blacksquare$$